27

D. D.

DISSERTATIO

DE

PELLUCIDITATE CORPORUM SPECIFICA,

QUAM

CONS. AMPL. FAC. PHIL. IN REG. ACAD. ABOËNSI,

PRÆSIDE

MAG. ANDREA PLANMAN,

Phys. PROFESS. Reg. & Ord. Reg. Acad. Scient. Stockh. SOCIO, nec non Fac. Phil. h. t. DECANO.

Publice ventilandam sistit

OLAVUS ÅKERREN,

Sudermannia-Svecus.

In AUDIT. MAJ. Die XVI Octobr. An. MDCCLXXVI.

Horis ante meridiem solitis.

ABOÆ,

Typis JOHANNIS CHRISTOPH. FRENCKELL,

Reg. Acad. Typogr.

§. I.

Quamvis pellucida corpora indies omnium oculis obversentur nihilque facilius ea intuentibus in mentem venire possit, quam animum ad æstimandam eorum pelluciditatem advertere; nihilominus plerique Physicorum hanc rem intactam reliquerunt, magis soliciti de caussa, quam de mensura pelluciditatis indaganda: fortassis quod in ista mensura certi quidpiam definiri posse diffiderent, deficientibus instrumentis, quibus instar lancis & moduli uti liceret ad determinandam luminis per corpora diaphana transmissi intensitatem. Interim tamen Celeberrimus Gallorum Mathematicus BOUGUER omnium primus, quantum quidem nobis constat, hanc materiam excolendam aggressus est, normamque & experimentis & geometricis ratiociniis detexit, ad quam pelluciditas corporum exigeretur (videsis ejus *Traité d' Optique sur la gradation de la lumiere)*. Idem argumentum Celeb. LAMBERT dein in sua *Photometria* haud leviter perstrinxit. Atque horum Virorum vestigia in opella hacce persequi etjam nos constituimus.

§. II.

§. II.

Experientia constat corpora alia aliis esse pellucidiora; ast, quantum pelluciditate differunt, non æque constat. Pendet namque hoc ab ista lege, quam luminis decrementa in trajectu diversarum profunditatum corporis diaphani, sequuntur, quamque non nisi experimentis, omni sagacitate instituendis, Mathesi facem præferente, detegere licet. Hinc non mirum, si alii atque alii, rem defunctorie perpendentes, in devia delapsi sint, quorum in numerum jure refertur P. FRANCISCUS MARIA, Capucinus Parisiensis, dum in Schediasmate, quod sub titulo, *Recens de lumine inventorum*, evulgavit, evincere conatus est, luminis intensitatem in eadem progressione Arithmetica imminutum iri, in qua crescit profunditas medii, quod lumen transmittit; prout Celeberr. BOUGUER loc. cit. perhibet. Ut autem lex horum decrementorum rite definiatur, supponimus corpus æquabiliter diaphanum in plura strata ejusdem crassitudinis divisum, lumenque in ista ab infinita distantia normaliter incidere. In uno quoque itaque strato lumen eadem parte debilitatur ob homogeneitatem, qua fit, ut idem semper numerus obstaculorum, quæ luminis transitum modo quocunque impediunt, in quolibet strato contineatur. Sit densitas luminis in primum stratum incidentis $= 1$, atque pars luminis ibidem intercepta $= \frac{1}{m}$; eritque lumen inde transmissum atque in secundum stratum incidens $=$

 1 —

$1-\frac{1}{m}$; lumen ibi iterum interceptum habetur $= \frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)$, atque transmissum $= 1-\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}$. In tertio strato est lumen interceptum $= \frac{1}{m}\left(1-\frac{2}{m}+\frac{1}{m^2}\right)$, & transmissum $= 1-\frac{3}{m}+\frac{3}{m^2}-\frac{1}{m^3}$, & sic porro. Quapropter in unoquoque strato se habet, ut sequitur, lumen:

	interceptum.	transmissum.
In 1:o - - - - -	$\frac{1}{m}$ - - - - - -	$1-\frac{1}{m}$.
2:o - - -	$\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)$ - - -	$\left(1-\frac{1}{m}\right)^2$.
3:o - - -	$\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)^2$ - - -	$\left(1-\frac{1}{m}\right)^3$.
4:o - - -	$\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)^3$ - - -	$\left(1-\frac{1}{m}\right)^4$.
- - - - - -	&c. - - - - - -	&c.
n:o - - -	$\frac{1}{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)^{n-1}$ - -	$\left(1-\frac{1}{m}\right)^n$.

Hinc patet lex quæsita: videlicet, *luminis densitatem, in trajectu mediorum diaphanorum, decrescere in progressione Geometrica, crescente profunditate eorundem in progressione Arithmetica.* Hanc legem Cel. BOUGUER experimento confirmavit: scilicet lumen, quod lumi-

lumini 32 cereorum æquabatur, per duo frusta vitri normaliter transmisit, comperitque illud duplo debilius, nempe æquale 16 cereorum lumini, evasisse. In trajectu autem 10 frustorum, luminis intensitatem unius cerei lumini æqualem deprehendit. Posita itaque, ad tenorem horum experimentorum, $n = 5$, $\frac{1}{m} = \frac{1}{2}$, habebitur $\left(1 - \frac{1}{m}\right)^n = (\frac{1}{2})^5 = \frac{1}{32}$, omnino ut experimentum innuit.

§. III.

Sed præstat rem generalius proponere. Incidat lumen radiis parallelis secundum directionem DCP (Fig. I.) normaliter in superficiem medii diaphani, in qua recta AB, secans DP in C, concipiatur ducta; sitque densitas luminis incidentis ut CB $= 1$; nec non densitas luminis ad P transmissi, ut recta PM $= y$, ipsi CB parallela; ponatur profunditas CP $= x$; eritque spatiolum infinite parvum $Pp = dx$, nec non debilitatio luminis hocce spatiolum trajecti $= -dy$. Hinc, posita densitate obstaculorum in eodem spatiolo $= n$, atque statuendo, cum Celeb. LAMBERT, debilitationem luminis futuram eo majorem, quo major sit obstaculorum, lumen intercipientium, atque luminis in ista obstacula incurrentis, densitas, quoque majus fuerit spatium a lumine trajectum, prodibit $-dy = nydx$; unde $-\frac{dy}{y} = ndx$, atque integrando $\text{Log.} \frac{1}{y} = \int ndx$. Vel, si obstacula ponantur ubivis æqualiter disseminata, quod valet de corporibus æquabiliter diaphanis, habebitur, ob n constantem in isto casu, Log. $\frac{1}{y} = nx$, quæ æquatio ostendit rectas CB & PM esse ordinatas ad Logarithmicam, cujus axis est CQ & subtangens $= \frac{1}{n}$.

Cor. 1. Ordinata quævis Logarithmicæ, pelluciditatem corporis exponentis, exhibet densitatem luminis, ad profunditatem, correspondente abscissa designatam, pervenientis. Sit ex. gr. Logarithmica BMN ad æstimandam corporis cujusvis dati pelluciditatem aptata, quam istius corporis *Photometricam* cum Celeb. BOUGUER appellamus, exhibeatque ordinata CB densitatem luminis incidentis, atque exponent densitatem luminis, profunditates, abscissis CP & CQ designatas, trajecti, correspondentes ordinatæ PM & QN respective.

Cor. 2. Cum curva hæc sit ejus naturæ, ut axem suum nunquam attingat, quantumvis propius ad eundem perpetuo accedat; patet hinc luminis densitatem in infinitum decrescere, quin unquam penitus exstinguatur. Ex æquatione namque inventa Log. $\frac{1}{y} = nx$ transeundo ad numeros absolutos habetur $\frac{1}{y} = N^{nx}$, vel $y = \frac{1}{N^{nx}}$, denotante N numerum, cujus Logarithmus Hyperbolicus $= 1$, qnæ æquatio ostendit, valorem ipsius y, quo densitas luminis exhibetur, esse finitum, quoties medii profunditas x est finitæ magnitudinis: aucta vero x, continuo decrescere y, neque prorsus evanescere, nisi posita x infinite magna,

in

in quo casu quantitas N^{nx} evadit etjam infinite magna; ideoque ejus reciproca $\overline{N^{nx}}^{1}$, densitatem luminis exponens, erit infinite parva seu evanescens.

Cor. 3. Si in æquatione $y = \overline{N^{nx}}^{1}$, ponatur x data, quemadmodum ponendum erit, quoties experimenta ad calculum revocentur, pendet y a valore ipsius n. Si $n = o$, erit $N^{nx} = 1$, adeoque $y = 1$, id quod ostendit omne lumen, absque ulla diminutione transmitti corpusque sic esse absolute pellucidum, cujusmodi tamen corpora actu dari minime constat. Si fuerit n infinita, evadit N^{nx} quoque infinita & consequenter $y = \overline{N^{nx}}^{1} = o$. In quo casu corpus erit absolute opacum, lumen nullum transmittens: hunc autem casum in natura dari haut autumamus, cum Illustr. NEWTONUS in sua *Optica* ostenderit, corpora etjam opaca densissima evadere pellucida, si modo satis tenuia facta sint, vel si occulti ipsorum meatus materia aliqua repleti evadant.

Cor. 4. Cum pro diversa corporum pelluciditate, eorum Photometricæ citius aut tardius ad axem suum convergant, idque pro quantitate subtangentis, quæ in unaquaque Photometrica est constantis magnitudinis; patet *specificam corporum pelluciditatem*, qua nempe indigitatur, quanto unum corpus altero sit pellucidius, *optime definitum iri, dum subtangentes Photometricarum eorundem inter se invicem comparantur*.

§. IV.

§. IV.

Restat, ut, exempli caussa, definiatur corporum diaphanorum pelluciditas specifica, quoad id per experimenta licuerit; in quem finem pericula, a Celeb. BOUGUER in pelluciditatem aquæ marinæ, vitri & aëris facta, ad calculum revocabimus. Expertus est namque vir hicce Celeberrimus densitatem luminis incidentis, ad istam in trajectu decem pedum profunditatis aquæ marinæ, esse, ut 3 ad 2. In æquatione itaque Log. $\frac{1}{y} = nx$, habetur $x = 10$ ped., $\frac{1}{y} = \frac{3}{2} = \frac{1}{0,666}$ quam proxime, atque definienda erit quantitas ipsius n reciproca seu $m = \frac{1}{n}$, quæ est subtangens Photometricæ, aquæ marinæ pelluciditatem exponentis. Cumque $m = \frac{x}{Log. \frac{1}{y}} = \frac{10}{Log. \frac{1}{0,666}}$. atque Logarithmus ipsius $\frac{1}{y}$ per integrationem sit inventus, qui ex canone Logarithmorum Hyperbolicorum erit depromendus; hinc, canone hujusmodi deficiente, ope Logarithmorum Briggianorum valor ipsius m sequenti modo invenitur:

Log. 1 — Log. 0,666 = Log. 0,1765258 = — 1,2468082.
Addatur Log. ipsius - - - 2,3025850 = 0,3622157.
— 1,6090239.

Quo

Quo Logarithmo subtracto a Log. 10 = 1,0000000. erit residuum = Log. m = 1,3909761. hinc habetur subtangens Photometricæ aquæ marinæ seu m = 24,6 pedum. Pari modo obtinetur subtangens Photometricæ vitri ex experimento Bougeriano, quo deprehensum est vix mediam luminis partem extinctam fuisse in trajectu ejusmodi vitri, crassitudinis trium pollicum, e quo lentes tuborum Opticorum parari solent: posita enim x = 3. poll., atque $\frac{1}{y} = \frac{1}{0,5}$, prodibit subtangens quæsita m = 4,3 pollicum.

§. V.

Quod ad pelluciditatem aëris attinet, ad istam investigandam, via nobis per methodum Lambertianam sternenda erit. Sit itaque AE (Fig. 2.) superficies telluris, cujus centrum C, AB altitudo aëris, ejusque stratum quodlibet $PMmp$, incidatque lumen in A secundum directionem rectæ DA. Fiat semidiameter telluris CA = 1, AM = x, densitas obstaculorum in M = n, densitas autem luminis in M = y, eritque $-dy = ndx$ (§. III.). Ponendo ulterius altitudinem strati EM = AP = v, atque ang. BAD = γ, existente radio = 1, ducendoque rectam MN in CP perpendicularem, habetur AN = $x\, Cos.\, \gamma$, atque MN = $x\, sin.\, \gamma$, nec non $x^2 + 2x\, Cos.\, \gamma = 2v + v^2$; unde $x + Cos.\, \gamma = \sqrt{Cos.\, \gamma^2 + 2v + v^2}$, quæ differentiata præbet $dx = \frac{(1 + v)\, dv}{\sqrt{Cos.\, \gamma^2 + 2v + v^2}}$

$= \frac{z\,dz}{\sqrt{Cos.\,\gamma^2 + z^2}}$, posita $2v + v^2 = z^2$. Hinc facta substitutione, habetur $- dy = \frac{-n z\,dz}{\sqrt{Cos.\,\gamma^2 + z^2}}$, vel, si fiat $r^2 = 1 + z^2$, erit, ob sin. $\gamma = \frac{Tang.\,\gamma}{Sec.\,\gamma}$, peracta substitutione, $- dy = \left(\frac{n z\,dz\,Sec.\,\gamma}{\sqrt{r^2 Sec.\,\gamma^2 - Tang.\,\gamma^2}} = \right) \frac{n z\,dz\,Sec.\,\gamma}{\sqrt{r^2 + z^2\,Tang.\,\gamma^2}}$. Quare, elevando $\sqrt{r^2 + z^2\,Tang.\,\gamma^2}$ ad potestatem $- \frac{1}{2}$ secundum Theorema Newtonianum atque integrando, erit Log. $\frac{1}{y} = Sec.\,\gamma \int \frac{n z\,dz}{r} - \frac{Sec.\,\gamma.\,Tang.\,\gamma^2}{2} \int \frac{n z^3\,dz}{r^3} + \frac{3\,Sec.\,\gamma.\,Tang.\,\gamma^4}{2.4} \int \frac{n z^5\,dz}{r^5} - \&c = A\,Sec.\,\gamma - \frac{1}{2} B\,Sec.\,\gamma.\,Tang.\,\gamma^2 + \frac{3}{2.4} C\,Sec.\,\gamma.\,Tang.\,\gamma^4 - \&c.$, respiciendo nempe integralia $\int \frac{n z\,dz}{r}$, $\int \frac{n z^3\,dz}{r^3}$ atque $\int \frac{n z^5\,dz}{r^5}$ ceu coëfficientes, & ponendo ista ipsis A, B, C respective æqualia, cum sint functiones altitudinis strati EM, ab angulo BAD non pendentes, atque respectus habeatur debilitationis luminis, totam viam DA transmissi. Cumque series hæc sit maxime convergens, quia altitudo atmosphæræ est parvitatis contemnendæ respectu semidiametri telluris; poterit primus seriei terminus voto satisfacere, quoties ang. BAD ad 80 gra-

dus

dus non excurrit. Quare erit Log. $\frac{I}{y} = A\ Sec.\ \gamma$, in qua æquatione daretur A, si modo y data foret. Cum autem debilitatio luminis, atmosphæram trajecti, experimentis directe determinari nequeat; res sequenti modo erit peragenda. Statuatur lumen ad A in directione DA perveniens $= y$, atque id in directione FA ad A translatum $= Y$; eritque manifestum, rationem ipsius y ad Y experimentis definiri posse: data autem ista ratione, una cum angulis incidentiæ DAB & FAB, dabitur coëfficiens A, atque hinc dabitur quoque y. Cum enim per allata sit Log. $\frac{I}{y} = A\ Sec.\ BAD$,

nec non - - - - - - Log. $\frac{I}{Y} = A\ Sec.\ BAF$,

erit Log. $\frac{Y}{y} = A(Sec.BAD - Sec.BAF) = A\left(\frac{1}{Cos.BAD} - \frac{1}{Cos.BAF}\right)$,

quæ dat $A = \dfrac{Log.\frac{Y}{y}}{\frac{1}{Cos.\ BAD} - \frac{1}{Cos.\ BAF}}$. Ad absolvendum hunc calculum conducunt experimenta a Celeb. BOUGUER capta, quæ ostendunt lumen lunare in altitudine 66° esse ad idem lumen in altitudine 19°, ut 2500 ad 1681, seu, ut 3 ad 2 quam proxime. Hinc habetur $\frac{Y}{y} = \frac{3}{2}$, ang. BAD $= 71°$, & ang. BAF $= 24°$; calculoque peracto, $\frac{1}{Cos.BAD} - \frac{1}{Cos.BAF} = 1{,}9770$

quam

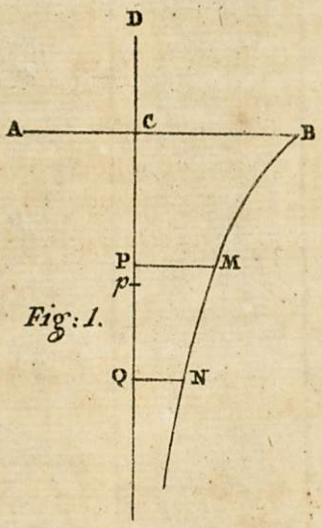

Fig: 1.

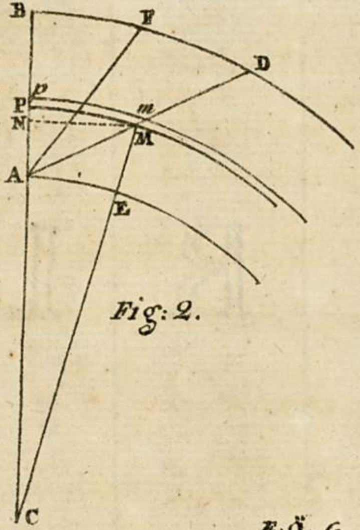

Fig: 2.

E: Ö. Sc.

quam proxime; nec non $A = 0,08907$, & consequenter erit $\text{Log.} \frac{1}{y} = 0,08907 \, Sec. \, \gamma$. Posita autem $\gamma = 0$, quod valet in trajectu luminis verticali, evadit $\text{Log.} \frac{1}{y} = 0,08907$; quare erit $\text{Log.} \, y = -1,9109300$, atque $y = 0,8146$, qui valor ipsius y excedit istum, a Cel. BOUGUER alia methodo erutum, partibus solummodo 0,0023. Ponatur jam ex calculo Cel. BOUGUER altitudo atmosphæræ $AB = 3911$ hexap. $= x$, & aër ejusdem ubique densitatis cum infimo nostro aëre, in quo casu n spectari potest ceu constans. Quapropter erit $m = \frac{x}{\text{Log.} \frac{1}{y}} = \frac{3911}{0,08907}$, unde, calculo subducto, obtinebitur aëris Photometricæ subtangens quæsita, seu $m = 19069$ hexap. Ast ponendo densitatem luminis atmosphæram normaliter trajecti $= 0,8123$, prout Cel. BOUGUER habet, prodibit subtangens, pelluciditatem aëris exponens, $m = 18813$ hexap., omnino ut Cel. BOUGUER istam quoque obtinuit. Longe autem minor evadit aëris pelluciditas ex experimento Lambertiano, quo densitas luminis, normaliter per atmosphæram ad oculum translati, deprehensa est $= 0,59$; quippe hinc habebitur subtangens quæsita $m = 7412$ hexap.

§. VI.

Ponatur jam pelluciditas specifica aquæ marinæ $= 1,000$; atque erunt pelluciditates specificæ mediorum allatorum, ut sequitur:

Aëris	ex experimento BOUGUERI	4589,000.
	- - LAMBERTI	1808,000.
Aquæ marinæ		1,000.
Vitri		0,017.

Sed sufficiant hæc exempli loco attulisse: exacta autem determinatio pelluciditatis specificæ tam horum, quam aliorum corporum diaphanorum, pendet ab experimentis exquisitissimis, quibus instituendis, neque otium neque instrumentorum apparatus nobis suppetunt. Proinde manum de tabula.

S. D. G.